$$E = (\vec{r}_u)^2 = R^2 \sin^2 v$$
$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0 \quad , \quad G = (r_v^2) = R^2$$

الخطوط الاحداثية متعامدة على سطح الكرة.

$$S = R^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin v \, dv \right] du = 2\pi R^2 [-\cos v]_0^{\pi}$$
$$= 2\pi R^2 [-(-1-1)] = 4\pi R^2$$

بصورة مشابهة نجد أن مساحة سطح الطارة
هي $4\pi a.b$

المحاضرة الخامسة   الأحد 2017/10/29

السطوح التقايسية

تعريف: نقول عن سطحين S_1 ، S_2 أنهما متقايسان، إذا كانت لهما الصيغة التربيعية الأولى ذاتها، أي:

$$I_1 = I_2 \quad \text{بمعنى آخر} \quad \boxed{dS_1 = dS_2}$$

بشكل توضيحي: إذا أمكن الانتقال من الصيغة التربيعية الأولى للسطح الأول إلى الصيغة التربيعية الأولى للسطح الثاني، من خلال تغيير (تحويل) محدد للاحداثيات بينهما.

كما هو موضح في المثال الآتي:

مثال: لنأخذ السطح الاسطواني المعطى بالمعادلات الوسيطة:

$$x = u \quad , \quad y = \sin u \quad , \quad z = v$$

نلاحظ أن:

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u) = (1, \cos u, 0) \quad , \quad \vec{r}_v = (0,0,1) = (x_v, y_v, z_v)$$

$$E = (\vec{r}_u)^2 = 1 + \cos^2 u \quad , \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0 \quad , \quad G = (\vec{r}_v)^2 = 1$$
$$\Rightarrow I_1 = (1 + \cos^2 u) du^2 + dv^2$$

نعرض S_2 السطح المستوي بمعادلاته الوسيطة:

$$x = u \quad , \quad y = v \quad , \quad z = 0$$

$\vec{r_u} = (1,0,0) \quad , \quad \vec{r_v} = (0,1,0)$

$E = G = 1 \ , \ F = 0 \Rightarrow I_2 = dx^2 + dy^2$

(القمر الجديد للتحليلات)

نفرض: $x = \int_0^u \sqrt{1+\cos^2 \tau}\, d\tau \quad , \quad y = v$

فنستنتج:

$dx^2 = (1+\cos^2 u)\, du^2 \quad , \quad dy^2 = dv^2 \Rightarrow I_1 = I_2$

أي أن السطح الاسطواني والسطح المستوي متقايسان.

تمرين: أثبت أن السطح السلسلي، المعطى بالمعادلة المتجهة:

$\vec{r}(u,v) = (\operatorname{ch} u \cos v \ , \ \operatorname{ch} u \sin v \ , \ u)$

والسطح اللولبي المعطى بالمعادلة:

$\vec{r}(u,v) = (u \cos v \ , \ u \sin v \ , \ v)$

متقايسان.

الحل: نفرض: $u_2 = \operatorname{sh} u_1 \quad , \quad v_2 = v_1$

حيث: $I_1 = \operatorname{ch}^2 u_1 \,(du_1^2 + dv_1^2)$

$I_2 = du_2^2 + (1+u_2^2)\, dv_2^2$

وبالتالي $I_1 = I_2$ فهما متقايسان.

الصيغة التربيعية الثانية لسطح نظامي:

ليكن S سطحاً نظامياً معطى بالمعادلة المتجهة: $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$

حيث $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

و E ، F ، G معاملات الصيغة التربيعية الأولى.

و $\vec{n} = \dfrac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|}$ متجه واحدة الناظم على السطح S.

ولنأخذ التفاضل التام للمتجه $\vec{r}$ من المرتبة الثانية:

لدينا $d\vec{r} = \vec{r_u}(u,v)\, du + \vec{r_v}(u,v)\, dv$

نأخذ التفاضل التام للعلاقة الأخيرة نجد:

$$\vec{d^2r} = \vec{r}_{uu}(du)^2 + 2r_{uv}\,du\,dv + \vec{r}_u\, d^2u + \vec{r}_{vv}(dv)^2 + \vec{r}_v\, d^2v$$

نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بعقبه داخلياً بالناظم $\vec{n}$ نحصل على ما يسمى
بالصيغة التربيعية الثانية للسطح S ونرمز لها بـ II

$$\vec{n}.\vec{d^2r} = II = (\vec{n}.\vec{r}_{uu})(du)^2 + 2(\vec{n}.\vec{r}_{uv})\,du\,dv + \vec{n}.\vec{r}_{vv}(dv)^2$$

ونفرض:

$$L = \vec{n}.\vec{r}_{uu} \quad , \quad M = \vec{n}.\vec{r}_{uv} \quad . \quad N = \vec{n}.\vec{r}_{vv}$$

عندئذ تكتب الصيغة التربيعية الثانية بالشكل التالي:

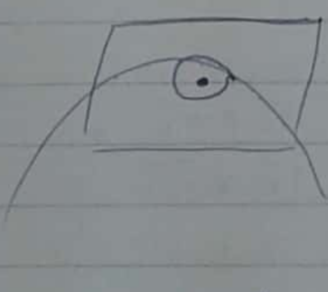
$$\boxed{II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}$$

تسمى الأعداد L, M, N معاملات الصيغة التربيعية الثانية للسطح S،
وهي أعداد ثابتة في نقطة محددة.

ملاحظة: إن الحدود التي تحوي $\vec{n}.\vec{r}_u$ و $\vec{n}.\vec{r}_v$ معدومة لأن $\vec{n}$ عمودي على
كل من $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ وذلك من خلال $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$

تصنيف نقاط سطح نظامي:

لتكن $II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$
الصيغة التربيعية الثانية لسطح نظامي S. لتحديد طبيعة نقاط السطح S
نتبع القاعدة الآتية:



- إذا كان $LN - M^2 > 0$ في نقطة ما من السطح S فإننا ندعو M_0 نقطة ناقصية.
  إن مسقط جوار النقطة M_0 من السطح S على المستوي المماس للسطح في M_0 يأخذ شكل قطعاً ناقصاً.
- إذا كان $LN - M^2 < 0$ فإننا ندعو M_0 نقطة زائدية.
- إذا كان $LN - M^2 = 0$ (L أو $N \neq 0$ أو $M \neq 0$)
  فإننا ندعو M_0 نقطة مكافئية.

/ /

• إذا كان $L = M = N = 0$ فإننا ندعو M_0 نقطة مستوية.

مثال: 1. كل نقطة من نقاط سطح الكرة هي نقطة ناقصية، لذلك تؤخذ الكرة كمثال للهندسة الناقصية أو الهندسة الريمانية.

2. كل نقطة من نقاط سطح مجسم القطع المكافئ الزائدي. $x^2 - y^2 = 2z$
عدا نقطة تطابقه مع نقطة الأصل $(0,0,0)$ هي نقطة زائدية
أو كل نقطة من نقاط المجسم السلسلي هي نقطة زائدية.
لذلك تعتبر مثال للهندسة الزائدية.



3. كل نقطة من نقاط السطح المستوي هي نقطة مستوية.

4. لندرس طبيعة نقاط سطح الطارة:
يعطى سطح الطارة بالمعادلة الموجهة:

$$\vec{r}(u,v) = \big((a + b\sin u)\cos v,\ (a + b\sin u)\sin v,\ b\cos u\big)$$

حيث $a > b > 0$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$

$$\vec{r_u} = (b\cos u\cos v,\ b\cos u\sin v,\ -b\sin u)$$

$$\vec{r_v} = \big(-(a + b\sin u)\sin v,\ (a + b\sin u)\cos v,\ 0\big).$$

$$E = (\vec{r_u})^2 = b^2 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = (\vec{r_v})^2 = (a + b\sin u)^2$$

$$\frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|} = \frac{b(a + b\sin u)}{b(a + b\sin u)}\,(\sin u\cos v,\ \sin u\sin v,\ \cos u)$$

$$\vec{r_{uu}} = (-b\sin u\cos v,\ -b\sin u\sin v,\ -b\cos u)$$

$$\vec{r_{uv}} = (-b\cos u\sin v,\ b\cos u\cos v,\ 0)$$

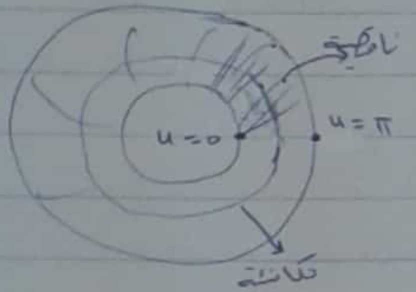
$$\vec{r_{vv}} = \big(-(a + b\sin u)\cos v,\ -(a + b\sin u)\sin v,\ 0\big)$$

$$L = \vec{r_{uu}} \cdot \vec{n} = -b \quad , \quad M = 0 \quad , \quad N = \vec{r_{vv}} \cdot \vec{n} = -(a + b\sin u)\sin u$$

نلاحظ أن : $LN-M^2 = b(a+b\sin u)\sin u$

وبالتالي إشارة $LN-M^2$ تتعلق بإشارة $\sin u$ ، ونميز الحالات الآتية :

1- $0 < u < \pi$ فإن $0 < \sin u$ ، وبالتالي النقاط ناقصية .



2- $\pi < u < 2\pi$ فإن $0 > \sin u$

والنقاط زائدية .

3- $u = \pi$ أو $u = 0$ ، $\sin u = 0$ ، وبالتالي

النقاط تكافئية

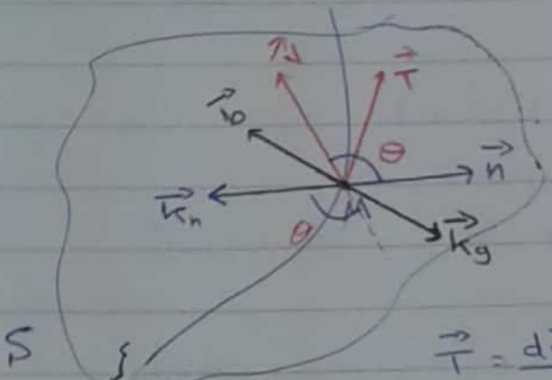
تقوس منحني على سطح (التقوس الناظمي ، التقوس الجيوديزي) :

ليكن ξ منحني نظامي على السطح S المعطى بدلالة الوسيط الطبيعي S :

$\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$

وليكن M نقطة من المنحني ξ .

وليكن $\vec{T}, \vec{n}, \vec{b}$ متجهات واحدية .



$\vec{T}$ متجه واحدي المماس للمنحني ξ في M .

$\vec{n}$ متجه واحدي الناظم على السطح S .

$\vec{b}$ متجه واحدي ثنائي الناظم على السطح .

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{r} \quad , \quad \vec{n} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|} \quad , \quad \vec{b} = \vec{n} \times \vec{T}$$

حيث $\vec{n}, \vec{T}, \vec{b}$ ثلاثية متعامدة مثنى مثنى

وبالتالي علينا كتابة أي متجه ولكن $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ أي أن :

$$\ddot{\vec{r}} = \alpha.\vec{T} + \beta.\vec{n} + \gamma.\vec{b}$$

الآن لنحدد قيم الثوابت α, β, γ ، بضرب طرفي العلاقة الأخيرة داخلياً بالمتجه $\vec{T} = \dot{\vec{r}}$ نجد :

$$\alpha = \vec{r}^{\,\cdot\cdot} \cdot \vec{r}^{\,\cdot} = \frac{d}{2ds}(\vec{r}^{\,\cdot} \cdot \vec{r}^{\,\cdot}) = \frac{d}{2ds}(1) = 0$$

لإيجاد β نضرب الأخيرة داخلياً بـ $\vec{n}$ نجد أن:

$$\beta = \vec{r} \cdot \vec{n} \quad , \quad \gamma = \vec{r}^{\,\cdot\cdot} \cdot \vec{b}$$

نسمي العدد β بالتقوس الناظمي للمنحني $\{$ على S ونرمز له بـ K_n ، $(K_n = \vec{r}^{\,\cdot\cdot} \cdot \vec{n})$

ونسمي العدد γ بالتقوس الجيوديزي للمنحني $\{$ على S ونرمز له بـ K_g ، $(K_g = \vec{r}^{\,\cdot\cdot} \cdot \vec{b})$

- نعلم أن $k = |\vec{r}^{\,\cdot\cdot}|$ تقوس منحنٍ على سطح ، وأن $\vec{r}^{\,\cdot\cdot} = \vec{T}^{\,\cdot} = k \cdot \vec{V}$

حيث $\vec{V}$ شعاع واحدة الناظم الأساسي للمنحني $\{$. وقد رمزنا له سابقاً بـ $\vec{N}$

ولكن الآن غيرنا الرمز كي لا يحصل التباس مع الصيغة التربيعية الثانية .

وذلك حسب علاقة فرينيه الأولى .

وبالتالي : $K_n = k(\vec{V} \cdot \vec{n})$ ، $k_g = k(\vec{V} \cdot \vec{b}) = k(\vec{V}, \vec{n}, \vec{T})$

حيث $k = |\vec{r}^{\,\cdot\cdot}|$ تقوس المنحني بشكل عام .

- نفرض θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{n}$ ، $\vec{V}$ وبالتالي يمكننا كتابة شعاع التقوس للمنحني :

$$\vec{K} = \vec{K}_n + \vec{K}_g$$

ونلاحظ من العلاقة

$$K_n = (\vec{r}^{\,\cdot\cdot} \cdot \vec{n}) = |\vec{r}^{\,\cdot\cdot}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\theta = k\cos\theta \quad ; \quad \vec{r}^{\,\cdot\cdot} \parallel \vec{V}$$

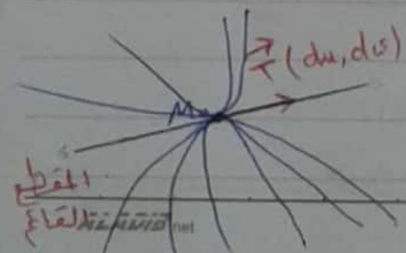
أي :

$$\boxed{K_n = k\cos\theta}$$

مبرهنة بونييه : إن التقوس الناظمي $K_n = k\cos\theta$ ثابت لجميع المنحنيات الواقعة على السطح S والتي لها المماس نفسه في هذه النقطة .

" أي التي لها المنحني المشترك (du, dv) "

الإثبات : نعلم أن :



$$\vec{r}^{\,\cdot\cdot} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \ldots$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}$$

بضرب الأخيرة داخلياً بـ $\vec{n}$ نجد أن:

$$K_n = \ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n} = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$= \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{ds^2}$$

وباعتبار أن:

$$ds^2 = I = E\,du^2 + F\,du\,dv + G\,dv^2$$

فإن:

$$K_n = \frac{II}{I} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

وباعتبار أن المعاملات L, M, N , E, F, G ثابتة في نقطة محددة M_0 فإن K_n ثابت لجميع المنحنيات التي لها المماس المشترك ذاته (أي لها المنحى المشترك (du, dv)).

ملاحظة: إذا قطعنا السطح S بمستوي يحوي المتجهين $\vec{n}$, $\vec{V}$ بحيث $\vec{V} \parallel \vec{n}$ فإن $\cos\theta = 1$ وبالتالي $K_n = K$.
يسمى k تقوس المقطع القائم للسطح S .

مثال: أوجد التقوس الناظمي لسطح الكرة التي نصف قطرها a .

الحل: وجدنا سابقاً أن $k = \frac{1}{a}$

$$\vec{r}(u,v) = (a\sin u\cos v,\ a\sin u\sin v,\ a\cos u)$$

حيث $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$

$\vec{r}_u = (a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v,\ -a\sin u)$

$\vec{r}_v = (-a\sin u\sin v,\ a\sin u\cos v,\ 0)$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = (\cos v\sin u,\ \sin v\sin u,\ \cos u)$$

$\vec{r}_{uu} = -a\sin u\cos v,\ -a\sin u\sin v,\ -a\cos u$

$\vec{r}_{uv} = (-a\cos u\sin v,\ a\cos u\cos v,\ 0)$

$\vec{r}_{vv} = (-a\sin u\cos v,\ -a\sin u\sin v,\ 0)$

$L = \vec{r}_{uu}\cdot\vec{n} = a \quad , \quad M = 0 \quad , \quad N = a\sin^2 u$

$E = (\vec{r}_u)^2 = a^2 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = (\vec{r}_v)^2 = a^2\sin^2 u$

$\Rightarrow k_n = \frac{II}{I} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$

التقوس الأساسي لسطح :

نلاحظ من العبارة $k_n = k.\cos\theta$ أن التقوس الناظمي مرتبط بالزاوية θ ، أي بالمنحنى (du, dv) ، تسمى القيم الحدية (الصغرى والعظمى) للتقوس الناظمي بالتقوسين الأساسيين له. وتسمى المناحي الموافقة لكل قيمة منها بالمنحنى الأساسي في النقطة المحددة.

- لنثبت أنه في كل نقطة من نقاط سطح نظامي يوجد منحيان أساسيان في تلك النقطة

سؤال دورة : عرف المنحنى الأساسي ، وأثبت أنه في كل نقطة من نقاط سطح نظامي يوجد منحيان أساسيان.

الإثبات : ليكن $(du, dv) = (\varphi, \eta)$ منحنٍ ما على السطح S في النقطة M.

عندئذٍ :

$$k_n = k(\varphi, \eta) = \frac{L\varphi^2 + 2M\varphi\eta + N\eta^2}{E\varphi^2 + 2F\varphi\eta + G\eta^2}$$

(فوق φ, η : اتجاه ، ومنحنى)

العلاقة الأخيرة هي دالة تابعة لـ (φ, η) مع اعتبار أنه في النقطة M_0 المعاملات G, F, E, M, N, L ثابتة.

الآن نفرض : $\varphi = \rho\cos\phi \quad , \quad \eta = \rho\sin\phi$

(تحتها : طول ، زاوية)

بالتعويض في الأخيرة نجد أن:

$$k_n = k(\varphi) = \frac{f\left(L\cos^2\varphi + 2M\cos\varphi\sin\varphi + \bar{N}\sin^2\varphi\right)}{f\left(E\cos^2\varphi + 2F\cos\varphi\sin\varphi + G\sin^2\varphi\right)}$$

أي أن: k_n يتبع الزاوية φ حيث $0 \le \varphi < 2\pi$ وأيضاً يعني k_n دالة مستمرة

وباعتبار أن k_n ينعدم عندما $\varphi = 0$ ، $\varphi = 2\pi$.

وحسب مبرهنة القيمة الوسطى فإن للتقوس الناظمي k_n قيمتين حديتين عظمى وصغرى.

يسمي القيم الحدية للتقوس الناظمي k_n بالتقوسين الأساسيين للمنحني S في M_0

ونرمز لهما k_1 ، k_2 .

طبعاً نسمي المناحي الموافقة للتقوسين الأساسيين بالمناحي الأساسية.